

発表題目：有限主義者は指数関数を使えるか？—Tait型有限主義の検討

本発表は、数学の哲学におけるいわゆるTaitのテーゼの批判的検討を行う。

数理論理学、特に証明論と呼ばれる分野は、Hilbert–Bernaysによって提唱された数学の基礎づけのプログラムに起源を持っている。彼らは、「有限の立場」という極めて弱い算術を範囲づけ、これが数学的知識の疑い得ない基礎をなすと考えた。有限の立場の中に全数学を証明論的に還元すること、これがいわゆる「ヒルベルト・プログラム」である。だが彼らは、有限の立場が具体的にどのような範囲の算術に対応するのか、またなぜ有限の立場が認識論的な特権性を持っているのか、明確な説明を残していない。

そこでここに二つの問題が生まれる。ひとつは、Hilbert–Bernaysが有限の立場として実際にはどんな体系を考え、その体系の特権性をどう保証しようとしていたのか、という歴史的問題。もうひとつに、Hilbert–Bernays自身の思考から離れたとき、「有限の立場」として特権視しうるような体系はどのようなものであり、その特権性はどこにあるのか、という概念的な問題である。

Taitは、論文「Finitism」(1981)において、後者の問題に答えを与えた。彼は、有限の立場が、原始再帰による関数定義と数学的帰納法による推論を備えた原始再帰的算術(Primitive Recursive Arithmetic、PRAと略される)に対応するとし、その特権性を次のような議論によって主張した(と解釈できる)。

- 1) 自然数に関するトリヴィアルでないどのような数学的知識も、反復としての自然数の概念を前提している。
- 2) 反復としての自然数の概念によって、PRAに基礎を与えることができる。
- 3) 1), 2)より、どのようなものであれ自然数に関するトリヴィアルでない数学的知識が可能であることを認めるなら、PRAを受け入れなければならない。

Taitの主張、特に、有限の立場がPRAに相当するという部分は、「Taitのテーゼ」と呼ばれ、しばしば、この問題についてのデフォルトの立場であると考えられている。彼の主張はZach(2001)やDetlefsen(1986)によって反駁されてきたが、発表者の見る所、Taitに対して有効な打撃が与えられているとは言いがたい。

この発表では、Taitの議論を批判的に検討する。目標は、Taitを次のようなジレンマに追い込むことにある。

- A) 反復としての自然数の概念から、原始再帰による関数定義を基礎付けることはできない。つまり、2)は誤り。もしくは
- B) 反復としての自然数の概念は、どのような数学的知識によっても前提される概念としては強すぎる。つまり、1)は誤り。

発表者の目標が果たされれば、3)に至るTaitの議論は成立しない。その上で、Taitのような仕方で特権視しうる体系は、いわゆる「厳格有限主義」的な、現実的な計算可能性によって限界付けられた体系になるだろうという予想を述べる。